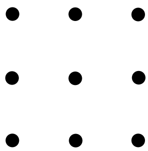
Kangourou Italia
Gara del 19 marzo 2009
Categoria Junior
Per studenti di seconda o terza della secondaria di secondo grado

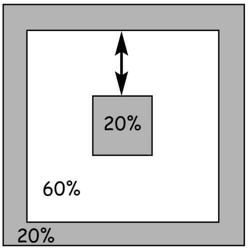
I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Ad una maratona hanno preso parte 2009 atleti. Il numero di atleti che si sono classificati dopo Matteo è il triplo del numero di atleti che lo hanno preceduto in classifica. In quale posizione della classifica si trova Matteo?
A) 501 B) 502 C) 1503 D) 1507
E) Un valore diverso dai precedenti

2. Quanto vale 1/2 di 2/3 di 3/4 di 4/5 di 5/6 di 6/7 di 7/8 di 8/9 di 9/10 di 1000?
A) 250 B) 200 C) 125 D) 50
E) Un valore diverso dai precedenti



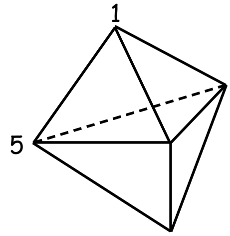
3. Qual è il più piccolo numero di punti che basta rimuovere dalla figura perché tra i punti che restano non ce ne siano tre allineati?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7



4. Un quadrato di lato 10 è suddiviso in tre regioni utilizzando due quadrati interni ad esso concentrici, come indicato in figura. L'area di ciascuna delle due regioni ombreggiate (il quadrato più interno e l'anello esterno) è il 20% della superficie totale del quadrato iniziale. Qual è lo "spessore", indicato in figura, della regione rimasta in bianco?
A) 2 B) $\frac{35}{16}$ C) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{5}$

5. Quanti numeri interi positivi N hanno la seguente proprietà:
"il numero di cifre della rappresentazione decimale del quadrato di N è uguale al numero di cifre della rappresentazione decimale del cubo di N" ?
A) 2 B) 3 C) 4 D) 9 E) Infiniti

6. Il solido in figura ha 6 facce, tutte triangolari. Ad ogni suo vertice viene associato un numero in modo che la somma dei numeri associati ai tre vertici di ogni singola faccia sia la stessa per tutte le facce. La figura indica i numeri associati a due dei vertici. Quanto vale la somma di tutti i numeri impiegati?

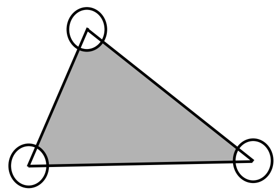


A) 9 B) 12 C) 17
D) 18 E) 24

7. Hai 2009 quadratini, ognuno di 1 centimetro quadrato di area, e li vuoi accostare in modo da ottenere un rettangolo il cui perimetro sia il maggiore possibile. Quanti centimetri misurerà il perimetro di questo rettangolo?

A) 588 B) 2009 C) 2010 D)4020 E) 8040

8. L'area del triangolo in figura è 80 m^2 e il raggio di ciascuno dei cerchi centrati nei vertici è 2 metri. Qual è l'area in m^2 della regione ombreggiata?



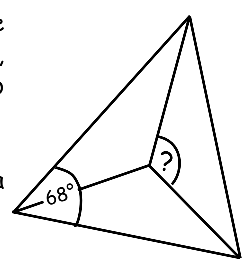
A) 76 B) $80 - 2\pi$ C) $40 - 4\pi$
D) $80 - \pi$ E) 78π

Junior

9. Leonardo ha scritto una sequenza di numeri. Ogni numero in questa sequenza, dal terzo in poi, è la somma dei due che lo precedono nella sequenza; il quarto numero è 6 e il sesto è 15. Qual è il settimo numero?

A) 9 B) 16 C) 22 D) 24
E) Nessuno dei precedenti

10. Nel triangolo acutangolo in figura sono tracciate le bisettrici degli angoli. Uno degli angoli, quello indicato, ha un'ampiezza di 68°. Qual è l'ampiezza dell'angolo indicato con il punto di domanda?



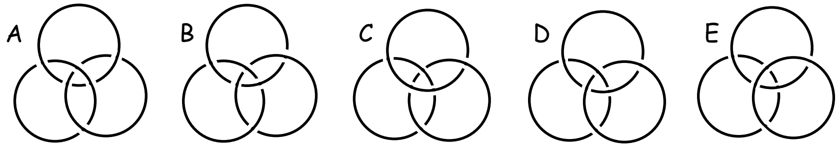
A) 124° B) 128° C) 132°
D) 136° E) Non è possibile rispondere senza conoscere l'ampiezza di un altro angolo del triangolo.

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Il compito in classe di Matematica affrontato da Maria si compone di 4 esercizi. Per ognuno di essi, a seconda di come è stato svolto, l'insegnante ha assegnato a Maria uno dei seguenti punteggi: 0, 1, 2, 3, 4, 5. La media dei punteggi realizzati da Maria è 4. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?

A) Maria ha ottenuto 4 in ogni esercizio.
B) Maria ha ottenuto 3 in esattamente due esercizi.
C) Maria ha ottenuto 1 in esattamente un esercizio.
D) Maria ha ottenuto 4 in esattamente due esercizi.
E) Maria ha ottenuto 3 in esattamente tre esercizi.

12. Un insieme di tre anelli si dice "Borromeano" (dal nome di una celebre famiglia lombarda che lo ha adottato come stemma) se gode della seguente proprietà: gli anelli non sono separati (cioè, per esempio, sollevando uno qualunque di essi, vengono trascinati anche gli altri) ma, se uno qualunque di essi viene rimosso, gli altri due restano liberi l'uno dall'altro. Quale dei seguenti insiemi di tre anelli è Borromeano?

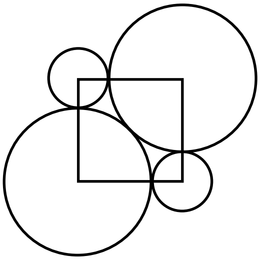


A) A B) B C) C D) D E) E

13. Su un'isola vivono due categorie di persone: i sinceri, che non mentono mai, e i bugiardi, che mentono sempre. Su quest'isola ci sono 25 persone in fila. Ognuno, tranne il primo della fila, dice che la persona davanti a lui nella fila è un bugiardo mentre il primo dice che tutti quelli dietro di lui sono bugiardi. Quanti bugiardi ci sono nella fila?
A) 24 B) 13 C) 12 D) 0
E) Non si può stabilire

14. Se $a \otimes b = ab + a + b$ e $3 \otimes 5 = 2 \otimes x$, allora x è uguale a
A) 1 B) 2 C) 6 D) 7 E) 10

15. Osserva la figura. Vi sono quattro circonferenze centrate nei vertici di un quadrato: le due di raggio maggiore sono mutuamente tangenti e ciascuna è tangente a ognuna delle due di raggio minore. Qual è il rapporto fra il maggiore e il minore dei raggi?



A) $\frac{2}{9}$ B) $\sqrt{5}$ C) $1 + \sqrt{2}$

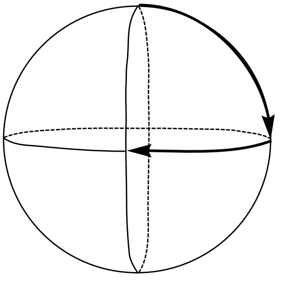
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{4\pi}{5}$

16. Quanti numeri interi n esistono tali che la distanza tra $\sqrt{n}$ e 10 sia strettamente minore di 1?
A) 39 B)29 C) 20 D)19 E) 1

17. Pinocchio ha scritto in sequenza alcuni numeri interi positivi tutti diversi fra loro e minori di 11. Il Grillo parlante osserva che in ogni coppia di numeri adiacenti, così come li ha allineati Pinocchio, ce n'è uno che è divisibile per l'altro. Quanti numeri può aver scritto al massimo Pinocchio?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

18. Osserva la figura. Su una superficie sferica sono tracciate tre circonferenze massime che si intersecano sempre ad angolo retto (giacciono su piani a due a due perpendicolari). Una formica si muove esclusivamente su archi di esse: parte da un'intersezione, segue un arco senza mai tornare indietro fino alla successiva intersezione e qui svolta a destra di 90°, procede allo stesso modo fino alla successiva intersezione dove svolta a sinistra e così di seguito, alternando nelle intersezioni svolte a destra e svolte a sinistra. Quanti quarti di circonferenza avrà percorso quando si ritroverà per la prima volta al punto di partenza?



A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 18

19. Nella rappresentazione decimale del numero 1,*1 al posto del simbolo "*" vi sono alcuni zeri. Sai che quel numero è compreso fra $\frac{20009}{20008}$ e $\frac{2009}{2008}$.
Quanti sono gli zeri?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Se $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ e $c = 3^{11}$, allora è vero che

A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $c < a < b$
D) $c < b < a$ E) $b < c < a$

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Quanti sono i numeri di dieci cifre contenenti solo le cifre 1, 2 e 3 nei quali due qualsiasi cifre adiacenti differiscono di 1?

A) 16 B) 32 C) 64 D) 80 E) 100

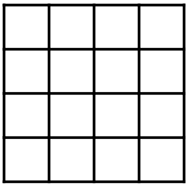
Junior

22. Marco ha a disposizione 2009 cubetti tutti della stessa dimensione e 2009 adesivi verdi quadrati ciascuno di lato uguale a quello dei cubetti. Con i cubetti vorrebbe formare un parallelepipedo rettangolo; vorrebbe poi colorarlo di verde rivestendolo con gli adesivi, facendone aderire uno (ed uno solo) ad ogni faccia dei cubetti rimasta visibile. Quanti adesivi resterebbero inutilizzati alla fine?

A) Più di 1000. B) 763 C) 476 D) 49

E) L'operazione non avrebbe successo, perchè gli adesivi disponibili non sono sufficienti.

23. Roberto ha alcune monete e vuole sistemarle nelle celle di una griglia 4x4 in modo che siano tutti diversi fra loro i numeri di monete complessivamente presenti in ciascuna riga e in ciascuna colonna. Naturalmente alcune celle possono rimanere vuote ed altre ospitare più di una moneta. Qual è il più piccolo numero di monete che gli consente di attuare il progetto?



A) 12 B) 21 C) 22 D) 23

E) Un numero diverso dai precedenti

24. Abbiamo alcune arance, alcune pere, alcune mele e alcune banane. Vogliamo mettere in fila alcuni di questi frutti in modo che, per ognuno dei quattro tipi, si trovino frutti che hanno fra i loro adiacenti frutti di ognuno degli altri tre tipi (ad esempio, esistano arance adiacenti a pere, arance adiacenti a mele, arance adiacenti a banane e così per gli altri tre tipi). Qual è il minimo numero di frutti che ci consente di attuare lo scopo?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9

E) 12

25. Qual è il più piccolo intero positivo n tale che il numero

$$(2^2 - 1)\cdot(3^2 - 1)\cdot(4^2 - 1)\cdot\ldots\cdot(n^2 - 1)$$

sia un quadrato perfetto?

A) 6 B) 8 C) 16 D) 27

E) un numero diverso dai precedenti

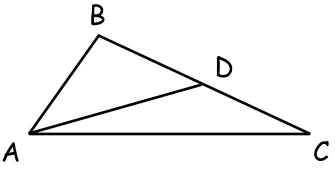
26. Per un numero intero positivo N considera la seguente condizione: fra tutti divisori di N, esclusi 1 e N stesso, il più grande è 45 volte il più piccolo. Quanti interi positivi N verificano questa condizione?

A) Nessuno B) 1 C) 2

D) Un numero finito maggiore di 2 E) Infiniti

27. Un canguro è seduto nell'origine di un sistema di due assi cartesiani ortogonali. Esso può compiere salti solo di lunghezza 1, e solo in orizzontale o in verticale. Quanti sono i diversi punti del piano in cui il canguro può venirsi a trovare dopo esattamente 10 salti?
A) 121 B) 100 C) 400 D) 441
E) Un numero diverso dai precedenti

28. In un triangolo ABC, AD è una mediana. L'angolo ACB misura 30°, l'agolo ADB misura 45°. Quanti gradi misura l'angolo BAD?
A) 45 B) 30 C) 25
D) 20 E) 15



29. Qual è il più piccolo numero di elementi che basta togliere dall'insieme {1, 2, 3, …, 16} dei primi 16 numeri naturali, se vogliamo che, comunque presi due dei numeri restanti, la loro somma non sia un quadrato perfetto?
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

30. Un numero primo si dice "strano" se ha una sola cifra oppure se, nel caso sia un numero primo di più cifre, entrambi i numeri che si ottengono sopprimendo la prima oppure l'ultima delle sue cifre sono numeri strani. Quanti numeri (primi) strani esistono? (Ricorda che il numero 1 non è primo).
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 11

2009

Categoria Junior

Per studenti del secondo o del terzo anno della scuola secondaria di secondo grado

1. Risposta **E)** Un quarto dei 2008 atleti che hanno corso insieme a Matteo si sono classificati prima di lui: Matteo si è dunque classificato al posto 2008/4 + 1 = 503.

2. Risposta **E)** Mediante ovvie semplificazioni, si ottiene facilmente che il prodotto delle nove frazioni vale 1/10. Si ha 1000/10 = 100.

3. Risposta **C)** Togliendo i 3 punti lungo una diagonale si ottiene effettivamente una configurazione in cui non ci sono terne di punti allineati; viceversa togliendo solo 2 punti la cosa non è possibile poiché resta almeno una linea (riga o colonna) sulla quale non sta alcuno dei due punti e su quella linea ci sono 3 punti allineati.

4. Risposta **D)** L'area del quadrato che si ottiene da quello originario, che ha area 100, levando l'anello esterno è 80, dunque il lato di tale quadrato misura $4\sqrt{5}$. L'area del quadrato interno più piccolo è invece 20, dunque il lato di tale quadrato misura $2\sqrt{5}$. La metà della differenza delle misure dei due lati è dunque $\sqrt{5}$.

5. Risposta **B)** Il cubo di un numero maggiore o uguale a 10 ha sicuramente più cifre decimali del suo quadrato; la stessa cosa vale per i numeri da 5 a 9 poiché il quadrato è un numero con 2 cifre decimali mentre il cubo ne ha tre; infine il quadrato di 3 ha solo 1 cifra decimale, mentre il suo cubo ne ha due. Restano 1, 2 e 4 che soddisfano la condizione.

6. Risposta **C)** Ci sono due facce che condividono i vertici marcati con 1 e 5 e quindi devono avere lo stesso numero, diciamo x, nel terzo vertice. Allora $1 + 2x = 1 + 5 + x$, cioè $x = 5$. Per simmetria, ne consegue che nel quinto vertice deve stare 1 e quindi la somma dei 5 numeri è 17.

7. Risposta **D)** A prodotto xy costante ($x,y > 0$), la somma $x + y$ cresce al crescere della differenza $|x - y|$: il rettangolo cercato è allora 1×2009.

8. Risposta **B)** Poiché la somma delle misure degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi, sommando le aree dei settori circolari (tutti di raggio 2) sottratti al triangolo si ottiene la metà dell'area del cerchio di raggio 2, dunque 2π.

9. Risposta **D)** Stante la legge con cui è costruita la sequenza, il quinto numero è 15 – 6 = 9, dunque il settimo è 9 + 15 = 24.

10. Risposta **A)** Dette x e y le misure in gradi dei rimanenti due angoli del triangolo acutangolo di partenza, si ha che x + y = 180 – 68 = 112. Allora (x + y)/2 = 56 per cui, facendo riferimento al triangolo il cui angolo ottuso è indicato dal punto di domanda, si ottiene che la misura di detto angolo ottuso vale 180 – 56 = 124 gradi.

11. Risposta **E)** E) è sicuramente falsa: per ottenere la media di 4 su quattro esercizi, se Maria avesse totalizzato 9 nel complesso di tre esercizi, avrebbe dovuto ottenere 7 nel quarto (mentre il voto più alto ottenuto da Maria non supera 5). A) è chiaramente possibile. Anche B), C) e D) lo sono, con punteggi rispettivamente (3, 3, 5, 5), (1, 5, 5, 5), (4,4,3,5).

12. Risposta **B)** Per liberare l'uno dall'altro i rimanenti due anelli, in A), C) e D) non basta rimuovere quello raffigurato più in alto; in E) invece i tre anelli sono totalmente separati. È facile convincersi che il sistema in B) soddisfa i requisiti.

13. Risposta **B)** Il primo della fila mente asserendo che tutti quelli che lo seguono sono bugiardi: in caso contrario, ognuno dal terzo in poi direbbe la verità e ne nascerebbe una contraddizione. Allora nella fila si alternano un bugiardo e un verace (che giustamente afferma che chi lo precede è un bugiardo): ne segue che il numero dei bugiardi supera di 1 quello dei veraci, cioè, su 25 persone in fila, 13 mentono e 12 dicono la verità.

14. Risposta **D)** x deve risolvere l'equazione 15 + 3 + 5 = 2x + 2 + x, cioè 21 = 3x.

15. Risposta **C)** Per ovvie ragioni di simmetria, le due circonferenze di raggio maggiore hanno lo stesso raggio e così pure le due di raggio minore. Posto 1 il maggiore dei due raggi, la diagonale del quadrato misura 2, dunque il lato misura √2. Il minore dei due raggi vale allora √2 – 1. Si ha 1/(√2 – 1) = (√2 + 1)/(2 – 1) = √2 + 1.

16. Risposta **A)** La radice quadrata di un intero cresce al crescere dell'intero: sono dunque accettabili tutti e soli gli interi maggiori di 81 (che è il quadrato di 9) e contemporaneamente minori di 121 (che è il quadrato di 11). Si ha 120 – 81 = 39.

17. Risposta **D)** Osserviamo che 7 non divide né è diviso da numeri tra 1 e 10 diversi da 1 e quindi eventualmente dovrebbe stare ad un estremo; invece 9 può avere come adiacenti 1 o 3; 10 può avere come adiacenti 1, 2 o 5; 8 può avere come adiacenti 1, 2 e 4. Per rendere la catena la più lunga possibile, si deve utilizzare 1 come elemento di raccordo

tra due gruppi di numeri che hanno come unico divisore comune 1 e quindi non può essere utilizzato per legare 7, che resterà quindi escluso dalla fila. Invece 9 3 6 2 10 5 1 4 8 è una possibile lista di 9 numeri che soddisfa le condizioni poste.

18. Risposta **B)** Stando alla regola, si raggiunge per la prima volta il punto antipodale di una qualsiasi intersezione dopo aver percorso tre quarti di cerchio massimo.

19. Risposta ***C)*** Sia x il nostro numero. Si ha 1,00001 =
$1 + 10^{-5} < 1 + 1/20008 = 20009/20008 < x < 2009/2008 = 1 + 1/2008 < 1 + 10^{-3} = 1{,}001$.
Stante l'ipotesi sulla rappresentazione decimale di x, gli zeri in essa non possono essere che 3.

20. Risposta **D)** Si ha $b = 2^{3\times 8} = 2^{24} < 2^{25} = a$.
Inoltre si ha $c = 3^{11} < 4^{11} = 2^{2\times 11} = 2^{22} < 2^{24} = b$.

21. Risposta ***C)*** I numeri possono iniziare per 2, 1 o 3. Da ogni 2 possono partire due diverse sequenze (con passo successivo 1 oppure 3); dopo ogni 1 e dopo ogni 3 si è obbligati a inserire un 2. Allora le scelte possibili raddoppiano ogni due posizioni: partendo da 2 ci saranno 2^5 scelte possibili, partendo da 3 o da 1 solo 2^4.
Complessivamente vi sono 32 + 16 + 16 = 64 possibilità.

22. Risposta **B)** Fattorizzando 2009 in numeri primi si ottiene $2009 = 7^2 \times 41$. Ne segue che i parallelepipedi rettangoli che Marco può costruire sono solo dei seguenti tre tipi (si supponga che il lato dei quadratini valga 1): $1 \times 1 \times 2009$, $1 \times 49 \times 41$, $7 \times 7 \times 41$. L'unico per il quale la superficie laterale non supera 2009 è il terzo: in questo caso vale
$2 \times 49 + 4 \times 7 \times 41 = 1246$. Si ha $2009 - 1246 = 763$.

23. Risposta **E)** Nella griglia vi sono 4 righe e 4 colonne: allora, considerando ogni riga o colonna singolarmente e il numero delle monete ivi presente, la somma più piccola ipotizzabile di questi numeri, se si vuole che siano tutti diversi fra loro, è 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28. Poiché ogni casella appartiene a una e una sola riga e a una e una sola colonna, nella somma precedente ogni moneta verrebbe contata esattamente due volte, quindi il numero di monete richiesto per realizzare tale somma sarebbe 14. Tale somma è effettivamente realizzabile come mostra la figura

1	2		
		3	1
		3	4

24. Risposta ***C)*** È chiaro che, perché la richiesta sia soddisfatta, ogni tipo deve essere presente in almeno due esemplari: allora il numero richiesto non può essere inferiore a 8.

In effetti esistono sequenze di 8 frutti che soddisfano la richiesta: ad esempio (usando le iniziali dei nomi dei tipi) APMBAMPB.

25. Risposta **B)** Poiché si ha $k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$, fissato $n > 1$ il nostro numero si può scrivere come $1\times3 \times 2\times4 \times 3\times5 \times 4\times6 \times \ldots \times (n-1)\times(n+1)$. Scrivendo di seguito tutti fattori, è facile rendersi conto che il minimo valore di n al quale ci può arrestare se si vuole ottenere un quadrato perfetto è 8.

26. Risposta **C)** Chiamiamo x il più piccolo divisore di N diverso da 1. Allora il divisore più grande di N diverso da N la forma 45x e risulta $N = (45x)x = 3^2 5x^2$. È evidente che possiamo attribuire a x solo i valori 2 e 3, poiché x deve essere primo (altrimenti non sarebbe il più piccolo divisore di N) e deve essere minore di 5 (altrimenti 3 sarebbe un divisore di N più piccolo di x).

27. Risposta **A)** È evidente che il canguro può fermarsi solo in punti a coordinate intere e, se compie un numero pari di salti, solo in punti la somma delle cui coordinate sia un numero intero pari. Inoltre, partendo da qualunque punto, con due salti vi può ritornare. Dopo 10 salti sono dunque possibili punti di arrivo tutti e soli i punti (x,y) tali che x e y siano interi relativi soddisfacenti sia la disuguaglianza $|x| + |y| \leq 10$ sia la condizione $x + y$ intero pari. I punti degli assi soddisfacenti entrambi questi requisiti sono 21, mentre è facile contarne 25 in ciascuno dei quattro quadranti (assi esclusi), per un totale di 121. (Si noti che, per evidenti ragioni di simmetria, il numero cercato deve essere di un'unità superiore ad un multiplo di 4).

28. Risposta **B)** L'angolo ADC misura 135°. Allora, dato che l'angolo ACD misura 30°, esiste sul lato AC un punto H tale che DH = HC. L'angolo ADH misura allora 15°, esattamente come l'angolo DAH (dato che l'angolo AHD misura 150°): ne segue che AH = DH. Inoltre il triangolo BHD risulta equilatero: allora AH = BH e il triangolo BHD è isoscele e rettangolo in H. Se ne deduce che l'angolo BAD misura 45° – 15° = 30°.

29. Risposta **C)** I quadrati perfetti ottenibili sommando opportunamente due dei primi 16 interi positivi sono solo 4, 9, 16 e 25. 9 può essere ottenuto sommando gli elementi di una qualunque delle 4 coppie a due a due disgiunte (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5); 25 può essere ottenuto sommando gli elementi di una qualunque delle 4 coppie (9, 16), (10, 15), (11, 14), (12, 13), anch'esse a due a due disgiunte e disgiunte da ciascuna delle precedenti. Ne segue che è necessario escludere almeno otto numeri. Di fatto è anche sufficiente: è facile verificare che basta escludere gli otto numeri 1, 3, 5, 7, 10, 12, 14, 16.

30. Risposta **D)** I numeri strani di una cifra sono 2, 3, 5, 7. Ne segue che quelli di due cifre sono solo 23, 37, 53, 73. Allora quelli di tre cifre vanno scelti fra 237, 373, 537 e 737: di questi solo 373 risulta primo (237 e 537 sono divisibili per 3, 737 è divisibile per 11). È chiaro allora che non esistono numeri strani di quattro o più cifre. Esistono dunque esattamente nove numeri strani.